**UNIVERSIDAD INCA GARCILASO DE LA VEGA**
**FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS, CÓMPUTO Y TELECOMUNICACIONES SISTEMA A DISTANCIA**

# PROBLEMAS RESUELTOS

## MATEMÁTICA I

1. Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a la gráfica de $f$ en el punto cuya abscisa es 2, si: $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$

   **Solución**

   $\dfrac{d}{dx}(2x^2+3x-5) = 4x+3$, entonces la pendiente de la recta tangente es $m_T = f'(2) = 11$ y $f(2) = 11$. Luego la ecuaciòn de la recta tangente y normal en el punto $(2,9)$ es:

   $$L_T : y - 9 = 11(x-2)$$
   $$L_N : y - 9 = \frac{-1}{11}(x-2) \quad \blacklozenge$$

2. Hallar la ecuación de la recta tangente y normal a la gráfica de $f$ en el punto cuya abscisa es 0, si: $f(x) = e^x$

   **Solución**

   $f'(x) = e^x$, entonces la pendiente de la recta tangente es $m_T = f'(0) = 1$ y $f(0) = 1$. Luego la ecuación de la recta tangente y normal en el punto $(0,1)$ es:

   $$L_T : y - 1 = x$$
   $$L_N : y - 1 = -x \quad \blacklozenge$$

3. Encuentre todos los puntos de la gràfica $y = x^3 - 5x + 2$ donde la recta tangente es perpendicular a la recta $x + 7y + 4 = 0$

   **Solución**

   La pendiente de la recta $x + 7y + 4 = 0$ es $-1/7$ y la pendiente de la recta tangente $m_T = 7$, por ser perpendicular.

Por otro lado $m_T = f'(a)$, es decir: $m_T = f'(a) = 3a^2 - 5$ resultando $3a^2 - 5 = 7 \Rightarrow a = \pm 2$, luego $a = -2 \Rightarrow f(a) = 4$ o $a = 2 \Rightarrow f(a) = 0$, entonces los puntos son $(-2, 4)$ y $(2, 0)$ ♦

4. La recta $L$ pasa por $P(33, 0)$ y es normal a la gráfica de $f(x) = x^2 - 4$ en $Q(a, f(a))$. Determine $Q$ y la ecuaciòn $L$.

   **Solución**

   La pendiente de la recta $L$ es $m = \dfrac{f(a) - 0}{a - 33} = \dfrac{a^2 - 4}{a - 33}$. Por otro lado, la pendiente de la recta $L$ también es: $m = \dfrac{-1}{f'(a)}$, y como $f'(a) = 2a$, entonces

   $$\frac{a^2 - 4}{a - 33} = \frac{-1}{2a} \Rightarrow 2a^3 - 7a - 33 = (a - 3)(2a^2 + 6a + 11) = 0$$

   En consecuencia, tenemos que $a = 3$ es la única raíz real, de donde concluimos que $Q = (3, 5)$ y la recta es $L : x + 6y - 33 = 0$ ♦

5. ¿Para que valores de $c, b$ la recta $2x + y = b$ es tangente a la parábola $y = cx^2$ cuando $x = 2$?

   **Solución**

   Si $y = cx^2$ entonces $y'(x) = f'(x) = 2cx$ y $m_T = f'(2) = 4c$.
   La recta tangente $y = -2x + b$ tiene $m_T = -2$, entonces $4c = -2 \Rightarrow c = \dfrac{-1}{2}$, luego $y = \dfrac{-1}{2}x^2$..
   El punto de tangencia es $(a, f(a)) = (2, f(2)) = (2, -2)$, entonces la ecuaciòn de la recta tangente es:

   $$\begin{aligned} L_T : y - f(a) &= f'(a)(x - a) \\ y + 2 &= -2(x - 2) \\ \Rightarrow y = -2x + 2 = mx + b \Rightarrow b = 2 & \end{aligned}$$ ♦

6. Escribir las ecuaciones de la recta tangente y normal de la curva $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$, en el punto cuya coordenada es $y = 3$

   **Solución**

   $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$, puesto que $y = 3$ obtenemos $x^3 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow p(-1, 3)$
   Ahora hallamos la pendiente de la recta tangente:

$$3x^2 + 2x\frac{dy}{dx} + 2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 - 2}{2y}; \qquad p(-1,3) \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-5}{6} = m_t$$

***La ecuación de la recta tangente*** es

$$y - y_0 = m_t(x - x_0); \qquad (x_0, y_0) = (-1, 3)$$

$L_t$ : recta tangente

$$y - 3 = \frac{-5}{6}(x + 1)$$

$$L_t : \qquad 6y + 5x - 13 = 0$$

***La ecuación de la recta normal*** es

$$y - y_0 = m_N(x - x_0); \qquad (x_0, y_0) = (-1, 3)$$

$L_t$ : recta normal $\qquad m_t \cdot m_N = -1 \Rightarrow m_N = \dfrac{-1}{m_t}$

$$y - 3 = \frac{6}{5}(x + 1)$$

$$L_N : \qquad 6x + 5y + 21 = 0 \quad \blacklozenge$$

7. Al derretirse una bola de nieve con radio inicial de $12cm$ su radio decrece a una razón constante. Comienza a derretirse cuando $t = 0(hrs)$ y tarda $12hrs$ en desaparecer . ¿Cuál es ala razón de cambio del volumen cuando $t = 6$?

   **Solución**

   $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$ ; $\quad \dfrac{dr}{dt} = -1$

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} \\
&= \frac{4\pi(3r^2)}{3}\frac{dr}{dt} \\
&= (4\pi r^2)(-1) \\
&= -4\pi . r^2 \\
&= -4\pi .(6)^2 = -144\pi \frac{cm^3}{h} \quad \blacklozenge
\end{aligned}$$

8. El área de un círculo decrece a razón de $2\pi\frac{cm^2}{seg}$ ¿Con qué razón decrece en radio del círculo cuando su área es $75\pi cm^2$?

**Solución**

$A = \pi r^2$ ; $\dfrac{dA}{dt} = -2\pi$ ; $\quad A = 75\pi$, pide hallar $\dfrac{dr}{dt}$ =??

$$\begin{aligned}
\frac{dA}{dt} &= \frac{dA}{dr}\frac{dr}{dt} \\
-2\pi &= 2\pi r\frac{dr}{dt} \\
\frac{dr}{dt} &= \frac{-1}{r}; \quad A = 75\pi \quad \Rightarrow 75\pi = \pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{75} \\
\frac{dr}{dt} &= \frac{-1}{\sqrt{75}}\frac{cm}{seg} \quad \blacklozenge
\end{aligned}$$

9. La altura de un cono decrese $3\frac{cm}{seg}$, mientras su radio aumenta $2\frac{cm}{seg}$. Cuando el radio mide $4cm$ y la altura $6cm$. ¿ está aumentando o disminuyendo el volumne del cono? ¿Con que razón?

**Solución**

$V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$ ; $\dfrac{dh}{dt} = -3\pi$ ; $\quad \dfrac{dr}{dt} = 2$ ; $r = 4$, $h = 6$

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \frac{\pi}{3}((r^2)'h + h'r^2) \\
&= \frac{\pi}{3}(2rr'h + \frac{dh}{dt}r^2) \\
&= \frac{\pi}{3}(2(4)(2)(6) - 3(16)) = 16\pi\frac{cm^3}{seg} \quad \blacklozenge
\end{aligned}$$

***Docente:Mg. Fernando Mollinedo Cuno***